Sažimanje slike i SVD dekompozicija

Marko Hajba, mag. math.

PMF - MO

2017

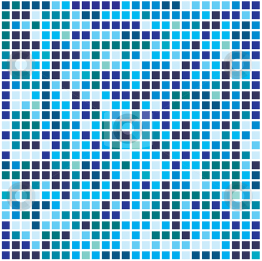
Motivacija

- Postoje mnogi formati za sliku (npr. jpeg, jpg, bmp, tiff, png, ...)
- Često se razlikuju u zauzetoj količini memorije za istu sliku, ali nema vidljive promjene u kvaliteti
- *Watermark*

Digitalni zapis slike

- Crno-bijela slika: matrica čije elemente nazivamo pikselima, a vrijednosti svakog elementa mogu biti u rasponu od 0(potpuno crna) do 255 (potpuno bijelo)
- RGB (crvena, zelena, plava): matrica sa "tri sloja", a svaki od njih sadrži intenzitet određene boje (0 - 255)za svaki piksel
- Kvalitetu slike možemo mjeriti pomoću elemenata u matrici.

Digitalni zapis slike



Slika: Pikseli - plava boja; https://cutcaster.com/vector/100284377-Blue-pixels/

Digitalni zapis slike

- Kvalitetu slike možemo mjeriti pomoću elemenata u matrici:
  - Neka je slika reprezentirana matricama dimenzija $m \times n$
  - MSE (*Mean Squared Error*) daje "udaljenost" između originala i slike dobivene sažimanjem (manji MSE = bolje)

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - x_{ij}^c)^2$$

  - PSNR(*The Peak Signal to Noise Ratio*) mjeri najveću pogrešku u decibelima i dan je izrazom:

$$PSNR = 10 \cdot \log \left(\frac{max^2}{MSE} \right)$$

  - Što je PSNR veći, to je komprimirana slika bolja.
  - CR (*Compression ratio*) daje postotak korištenih informacija originalne slike u komprimiranoj.
  - BPP (*Bit-Per-Pixel*) pokazuje broj bitova potrebnih za pohranu jednog pixela slike.

SVD dekompozicija

Teorem

Ako je $C \in \mathbb{C}^{m \times n}$*, tada postoje unitarne matrice* $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ *i* $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *tako da je*

$$U^* CV = \Sigma, \Sigma = diag(\sigma_1, ..., \sigma_{min\{m,n\}}),$$

pri čemu vrijedi

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_{min\{m,n\}} \geq 0.$$

Brojeve $\sigma_1, ..., \sigma_{min\{m,n\}}$ *zovemo singularne vrijednosti matrice* C*. Stupce matrice* U *zovemo lijevi, a stupce matrice* V *desni singularni vektori matrice* C*.*

SVD dekompozicija

Teorem

*(**Ekhard, Young, Mirsky**)*
Neka je $C = U\Sigma V^*$ *singularna dekompozicija matrice* $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *ranga* r*.* *Neka su* $U_r = [u_1, ..., u_r]$*,* $\Sigma_r = diag(\sigma_1, ..., \sigma_r)$ *i* $V_r = [v_1, ..., v_r]$*. Neka je* $k < r$ *i*

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^* = U_r \Sigma_r V_r^*.$$

Tada je $\min_{rang(K)=k} \|C - K\|_2 = \|C - C_k\|_2 = \sigma_{k+1}$*.*

Sažimanje slike

Slika: Originalna slika koju ćemo korisiti za testiranje.(http://7-themes.com/6869432-tree-wallpaper.html)

Sažimanje slike

Ideja sažimanja slike pomoću SVD-a:

- Napravi SVD od matrice koja reprezentira sliku, tj. $A = U\Sigma V^*$, $\Sigma = diag(\sigma_1, ..., \sigma_r, 0, ..., 0)$.
- Matrica Σ određuje rang aproksimacije. Odaberemo mali red aproksimacije $k < r$.
- Aproksimacija slike je dana sa $A_2 = U\Sigma_2 V$, $\Sigma_2 = diag(\sigma_1, ..., \sigma_k, 0, ..., 0)$. OD U uzimamo prvih l stupaca, a od V prvih l redaka
- znamo da je tada $\|A - A_2\| = \sigma_{k+1}$
- Izračunaj koliko je dobra aproksimacija (MSE, PNSR, CR, BPP).

Sažimanje slike-uvjet

- Uvjet na broj singularnih vrijednosti kako bismo imali sažimanje

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^* = U_r \Sigma_r V_r^*,$$

dakle dimenzije reduciranih matrica i broj podataka koje trebamo pamtiti:

  - za matricu U $m \times k$
  - za matricu V $n \times k$
  - k singularnih vrijednosti

$$km + kn + k < mn$$

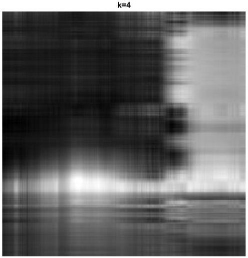
$$k < \frac{mn}{m+n+1}$$

  - za sliku dimenzije 512x512 piksela broj singularnih vrijednosti mora biti manji od $\frac{512^2}{1025} \approx 255.75$, dakle najviše 255.

Sažimanje slike

Zbog jednostavnosti pretvoriti ćemo našu sliku u crno-bijelu verziju. Odabrati ćemo nekoliko različitih $k < 256$ i odrediti pogrešku, tj. kvalitetu aproksimacije. Usporediti ćemo rezultate sa sažimanjem koje se dobije korištenjem *valić* transformacije. Cijelu analizu napraviti ćemo u programskom paketu Matlab.

Rezultati



Slika: Originalna crno-bijela slika i slika dobivena korištenjem samo 4 najveće singularne vrijednosti. $MSE = 490.397$, $PSNR = 21.23$, $norm_2 = 4147.3$. Koristimo ukupno $512 * 4 * 2 + 4 = 4100$ podataka umjesto $512^2 = 262144$, tj. 1.56% informacija

Rezultati

Slika: Originalna crno-bijela slika i slika dobivena korištenjem samo 24 najveće singularne vrijednosti. $MSE = 170.51$, $PSNR = 25.81$, $norm_2 = 1071.4$. Koristimo $512 * 24 * 2 + 24 = 24600$ podataka, tj. 9.38% informacija

Rezultati

Slika: Originalna crno-bijela slika i slika dobivena korištenjem 44 najveće singularne vrijednosti. $MSE = 108.50$, $PSNR = 27.78$, $norm_2 = 740.5$. Koristimo ukupno $512 * 44 * 2 + 44 = 45100$ podataka umjesto $512^2 = 262144$, tj. 17.20% informacija

Rezultati

Slika: Originalna crno-bijela slika i slika dobivena korištenjem 64 najveće singularne vrijednosti. $MSE = 76.06$, $PSNR = 29.32$, $norm_2 = 572.6$. Koristimo ukupno $512 * 64 * 2 + 64 = 65600$ podataka umjesto $512^2 = 262144$, tj. 25.02% informacija

Rezultati

k=244

Slika: Originalna crno-bijela slika i slika dobivena korištenjem samo 244 najveće singularne vrijednosti. $MSE = 6.00$, $PSNR = 40.35$, $norm_2 = 151.2$. Koristimo ukupno $512 * 244 * 2 + 244 = 250100$ podataka umjesto $512^2 = 262144$, tj. 95.41% informacija

Rezultati

Vrsta greška	$k = 4$	$k = 24$	$k = 44$	$k = 64$
MSE	490.3970	170.5058	108.5036	76.0576
PSNR	21.2253	25.8134	27.7764	29.3194
% informacija	1.56	9.38	17.20	25.02

Vrsta greška	$k = 84$	$k = 104$	$k = 244$
MSE	55.5229	41.4723	5.9952
PSNR	30.6861	31.9532	40.3528
% informacija	32.84	40.66	95.41

Tablica 1. Prikaz pogreške dobivene uzimanjem k najvećih singularnih vrijednosti u sažimanju slike i postotak korištenih informacija.

Zaključak

- SVD nudi jednostavan način sažimanja slike pomoću aproksimacije matricom manjeg ranga.
- Najveće singularne vrijednosti pripadaju najvažnijim osobinama (značajkama) slike i već pri malim k možemo vidjeti o kojim se objektima radi na slici.
- Što je k manji, to manje informacija koristimo (bolji CR), ali kvaliteta slike dobivene aproksimacijom je lošija.
- Da bismo imali sažimanje slike, broj singularnih vrijednosti u rekonstrukciji mora biti $k < \frac{mn}{m+n+1}$, gdje je slika dimenzije $m \times n$ piksela.
- Dimenzija aproksimacije treba biti uzeta s oprezom, nastojeće uštediti što više memorije, ali pazeći da kvaliteta slike bude zadovoljavajuća.